欧式空间

欧式空间的定义及其简单性质

- 定义1 内积
  - 性质
    - 正定性
    - 对称性
    - 双线性性
    - 定义了内积的线性空间为欧式空间/实数域上的内积空间
  - 常用内积
    - 向量点乘运算
    - 连续函数线性空间的内积定义为f(x)·g(x)在定义域内的定积分
  - 度量矩阵
    - 给定基之下内积的计算（利用坐标）
      - XAY，A为度量矩阵
    - 同一内积在不同基下度量矩阵之间的关系为合同关系
- 定义2 长度
  - 定理1 柯西-施瓦茨不等式
    - |(a,b)|≤|a|·|b|
      - 取等的充要条件：a,b线性相关
        - 必要性：利用二项式重根t0
        - 充分性：直接设出a和b线性关系
      - 证明：假设a≠0，利用（at+b,at+b）的判别式
      - $\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$
        连续函数空间对应不等式
  - 正定性
  - 半线性（数乘）
  - 三角不等式
- 定义3 夹角
- 定义4 正交
  - 勾股定理仍然成立
  - -π到π区间内｛1,sinx,cosx,...,sinnx,cosnx,...｝中任意两个函数在连续函数空间的内积意义下正交
  - 正交向量组
    - 标准正交向量组
  - 定理2 欧式空间中的一个正交向量组的任意一个由有限个非零向量组成的部分组必定是一个线性无关组
    - 反证法
    - 欧式空间的子空间依然是欧式空间

标准正交基

- 定义5
  - 正交基
  - 标准正交基
    - n维欧式空间的一个基为该欧式空间的一个标准正交基的充分必要条件是内积在该基下的度量矩阵为单位矩阵
- 定理3 施密特正交化（通常最后还需要单位化）

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1,\\ \beta_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_k,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_k,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_k,\beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\beta_{k-1})}\beta_{k-1},\quad 2\leqslant k\leqslant n\end{cases}$$

- 定理4 设V为n维欧式空间
  - 1）V中任意两个标准正交基之间的过渡矩阵一定是正交矩阵
  - 2）如果从V的一个标准正交基（I）到基（II）的过渡矩阵是正交矩阵，那么基（II）也是一个标准正交基
  - 3）一个n阶实矩阵是正交矩阵当且仅当它是V中两个标准正交基之间的过渡矩阵

Presented with xmind