# 二次型

- 二次型的正定性
  - 定义2 设A为n阶实对称矩阵，若X'AX≥0（≤0），则称实二次型X'AX及矩阵A是半正定（半负定）的，若不等号严格成立，则称二次型及矩阵A是正定（负定）的
  - 定理5 设A为n阶实对称矩阵，则如下结论等价
    - 1）实二次型f(x1,x2,..,xn) = X'AX正定（orA正定）
    - 2）f(x1,x2,...,xn)的正惯性指数等于n
    - 3）A的所有特征值恒正
    - 4）A与单位矩阵合同
    - 5）存在n阶可逆实矩阵B,使得A = B'B
  - 定理6 n阶实对称矩阵A正定和A的所有k阶（1≤k≤n）顺序主子式恒正互为充要条件
    - 证明必要性：数学归纳法
    - 推论1 n阶实对称矩阵负定和A的k阶顺序主子式|Ak|的符号与（-1）k的符号一致（1≤k≤n）互为充要条件
  - 定理7 设A为n阶实对称矩阵，则如下结论等价
    - 1）实二次型f(x1,x2,..,xn) = X'AX半正定（orA半正定）
    - 2）f(x1,x2,...,xn)的负惯性指数等于0
    - 3）A的所有特征值非负
    - 4）A与其相抵标准型合同
    - 5）存在n阶实矩阵B,使得A = B'B
    - 6）A的所有k阶（1≤k≤n）主子式大于等于0
    - 推论2 n阶实对称矩阵半负定和A的所有k阶主子式的值为0或者其符号与（-1）k的符号一致（1≤k≤n）互为充要条件
- 实二次型的正交替换
  - 定理4 任意一个n元的实二次型均可经正交替换化为标准形，且这个标准形中平方项的所有系数恰为这个实二次型矩阵的所有特征值
  - 在正交替换的坐标变换下，空间的几何体保持原来的形状完全不变
- 二次型的规范形
  - 复二次型的规范形
    - 将不等于0的平方项系数化为1
  - 实二次型的实规范形
    - 定理3（惯性定理） 实二次型的实的标准形中的正系数项的个数、负系数项的个数以及零系数项的个数与非退化的线性替换的选取无关
      - 正惯性系数 p
      - 负惯性系数 r-p
      - 符号差 2p-r
        - 线性替换不变量
    - 任意一个秩为r且正惯性系数为p的n阶实对称矩阵均在实数域中与其实规范形合同
- 二次型的定义及标准形
  - 定义
    - n元二次型
      - 系数
      - 实二次型
      - 复二次型
      - n元零二次型
    - 非退化线性替换
    - 线性替换
      - 非退化
      - 退化
      - 实
      - 复
    - 标准形
      - 实标准型
      - 复标准型
  - 定理1 数域P上的任何一个关于变元x1,x2,...,xn的n元二次型均可经P上的某个非退化的线性替换化为标准形
    - 配方法
      - 平方项系数不全为零
        - 逐个将x1 ~ n的所有项归入一个完全平方项
      - 平方项系数全为零
        - 构建特殊的非退化线性替换，化为
    - 要化回x1=...xn=...形式
  - 特殊情形
- 二次型的矩阵形式与矩阵的合同
  - 定义
    - f(x1,x2,...,xn) = X'AX（矩阵表达式）,X = (x1 x2 ... xn)',A=(aij)n*n（矩阵，且二次型的矩阵是对称的）
  - 性质1 数域P上的n元二次型与P上的n阶对称矩阵是一一对应的
  - 定理2 设A为数域P上的一个n阶对称矩阵，则存在P上的n阶对角矩阵D及n阶可逆矩阵C，使得二次型f(x1,x2,...,xn) = X'AX经过非退化的线性替换X = CY化为Y'DY
    - 等价
  - 定义1 若存在可逆矩阵C使得B = C'AC，则称A与B合同
    - 反身性
    - 对称性
    - 传递性
      - 等价关系
    - 任意一个n阶对称矩阵均与某个对角矩阵合同
      - 二次型的秩（非退化线性替换的不变量）