矩阵的特征值理论与相似对角化

特征值与特征向量的定义及计算

- 定义1 特征值，特征向量
  - 特征多项式
  - 特征子空间，特征线性方程组
  - 计算A的所有特征值和特征向量的步骤
    - 求出所有特征值
    - 针对每一个特征值寻找基础解系
    - 表示所有特征向量

特征值与特征向量的基本性质

- 性质1 $|A|$=所有特征值乘积，$tr(A)$=所有特征值和
  - 证明：展开$|xE-A|$为关于x的多项式，利用韦达定理
- 性质2 方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关
  - 证明： A左乘线性无关表达式，联立原式消元
- 性质3 A的分属不同特征值的线性无关的向量仍线性无关（不需证明）
- 性质4 几何重数≤代数重数
  - 三个定理

矩阵的相似及其性质

- 定义2 $B=P'AP$ or $PB=AP$ 则A与B相似
  - 性质5 相似矩阵的秩相同；相似矩阵是相抵的；相似矩阵的行列式相同
  - 性质6
    - 相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值
      - 证明思路：$|xE-B|=|xE-A|$
    - $PB=AP$时，将V_1、V_2分别记作A、B的特征子空间，则 $V_1=PV_2$（不需证明）
  - 等价关系
    - 自反性
    - 对称性
    - 传递性
    - 若尔当矩阵

实对称矩阵的相似对角化

- 性质7 n阶实对称矩阵有n个实特征值
- 性质8 实对称矩阵的属于不同特征值的实特征向量必正交
- 定理5 任意一个n阶实对称矩阵均可在R上相似对角化，且存在n阶正交矩阵U使得$U'AU$为对角矩阵
  - 此时相似对角化不需要判断是否可以，但是需要将基础解系变成标准正交基

矩阵的相似对角化

- 定理4 设A是数域P上的一个n阶方阵，则以下命题等价:
  - 1）A与P上的某个对角矩阵相似
  - 2）A在P中有n个线性无关的特征向量
  - 3）P中存在一个由A的特征向量所形成的基
  - 4）A在P中的所有两两互异的特征子空间的维数之和等于n
  - 5）A在P上有n个特征值（当特征多项式有重根时，按重数计），且对于每个特征值x，$\dim V_x$等于x的重数
- 相似对角化步骤
  - 1）求出所有特征值，并判断重数之和是否与矩阵阶数相等
  - 2）验证每一个特征值对应的特征子空间维数是否等于特征值重数，并求出基础解系
  - 3）表示相似对角化结果以及P（p120）