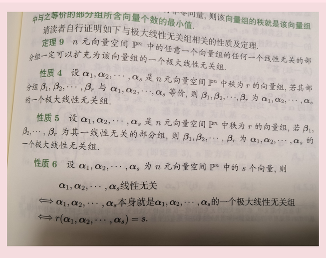
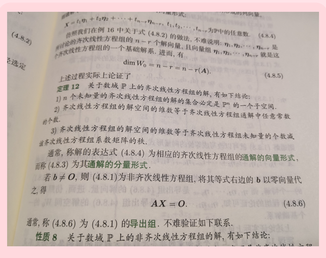
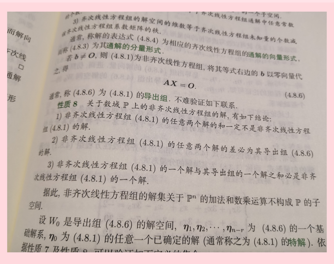
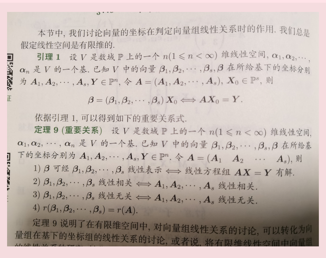
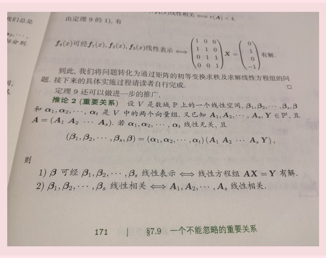
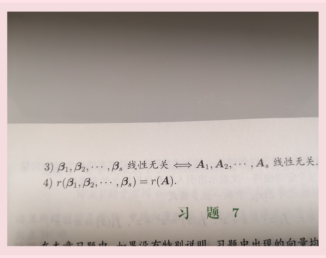
线性空间

- **运算的刻画**
  - 直积与二元运算
  - 数乘运算
- **线性空间的定义**
  - #定义3：运算
    - 数的加法性质
      - 交换律
      - 结合律
      - 零元素
      - 负元素
    - 数的乘法性质
      - 1的数乘
      - 乘法结合律
      - 乘法对加法的分配律
  - #定理1
    - 零向量唯一
    - 对每个向量，负向量唯一
    - 零向量&0的数乘
    - 负元素
    - ca=0 ——>c=0 or a为零向量
- **向量组的线性关系**
  - 定义1 向量组的线性组合
  - 定义2 （一个向量经向量组）线性表出
    - 引理1 基本关系式
    - 定理1 线性表示与方程组AX=b有解的关系
      - 通常利用秩的大小比较做题
  - 定义3 线性相关/无关（的向量组）
    - 定理2 线性表示与线性相关的关系
    - 定理3 线性相关与方程组解以及秩的关系
      - 定理4 A线性无关 Ab线性相关——>b可经A线性表示
        - 证明：定理1+3
        - 法2：定义
      - 定理5 n元向量空间中任意一个至少含有n+1个向量的向量组必线性相关
- **向量组的线性表示及等价**
  - 定义4 向量组I经向量组II线性表示
    - 引理2 重要关系式 A=BM <——> A可经B线性表示
      - 形式矩阵的运算
        - 结合律、传递性
    - 定理6 (I)(s)可经(II)(t)线性表示 且 s>t ——> (I)线性相关
      - 证明：引理2+定理3
      - 证明2：利用形式矩阵
      - 推论1 A可经B线性表示且A线性无关——> s<=t
  - 定义5 n元向量空间中两个可以相互线性表示的向量组是等价的
    - 自反性、对称性、传递性
    - 定理7 任意两个等价的且仅含有有限个向量的线性无关向量组必含有相同个数的向量
      - 证明：推论1
- **极大线性无关组与向量组的秩**
  - 定义6 极大线性无关组（线性无关+线性表示）
    - 性质1 A是极大线性无关组，Ab必线性相关
    - 
      性质6
  - 定义7 极大线性无关组（线性无关+线性相关）
    - 性质2 任何两个极大线性无关组含有相同个数的向量
    - 性质3 任何一个极大线性无关组与向量组本身等价
      - 性质4
      - 性质5
    - 定理8 n元向量空间中任意一个由不全为零的向量所组成的向量组必存在极大线性无关组
      - 由全为零向量组成的向量组的秩认定为0
    - 定理9 扩充
- **维数 基 坐标**
  - 定理10 dimPn=n
    - 证明：找一组 {e1~en}
  - 定义8 任意一个极大线性无关组的任何一种排列为一组基
    - 坐标、第i个坐标（定义7、引理1、定理4）
    - 常用基
- **基之间的过渡矩阵 坐标变换**
  - 过渡矩阵
    - B=AM ——> 称M为从基A到基B的过渡矩阵
    - 由线性无关+定理3 AB均可逆——> M=A'B 且 M依然可逆
      - A=BM' ——> AB的过渡矩阵互为可逆矩阵
  - 坐标变换关系
    - 设a在AB下的坐标分别为xy，x=My
      - a=By=AMy=Ax ——> x=My
- **矩阵的秩与向量组的秩之间的关系**
  - 矩阵的行秩、矩阵的列秩、矩阵的秩
    - 引理3 初等行变换不改变行（列）秩
    - 引理4 初等列变换不改变行（列）秩
      - 转置
    - 定理11 三秩合一
      - 证明：把A转化为标准矩阵B，易证B三秩合一，由引理34得A三秩合一
  - 求极大线性无关组方法：向量转置——初等行变换——取阶梯头对应向量
- **子空间**
  - 定义9 子空间
    - 非空子集W
    - 运算封闭
      - W中的一个向量组在W中线性无关 <——> 向量组在V中线性无关
    - 平凡子空间：V和0
  - 定义10 子空间的基和维数
  - 由a1,a2,...,as所扩张而成的子空间
  - 行空间和列空间
  - 最小子空间
- **线性方程组解的结构**
  - 性质7 齐次线性方程组的解的线性组合依然是该齐次线性方程组的解
    - 解空间：W0= {X|AX=O，X属于Pn}
    - 基础解系：W0的任意一个极大线性无关组
      - dimW0：基础解系所含向量个数
        - dimW0 = n - r = n - r(A)
          - 
            定理12
  - AX=O为AX=b的导出组
    - 
      性质8 非齐次线性方程组的解
    - 定理13 非齐次线性方程组的解的集合必定不是Pn的子空间，其通解必定等于其任意一个特解与其导出组的通解之和
- **一个不能忽略的重要关系**
  - 对向量组线性关系的讨论，可以转化为向量组在基下的坐标组的线性关系的讨论
    - 
      #定理9
    - #推论2
      - 
      - 

Presented with xmind