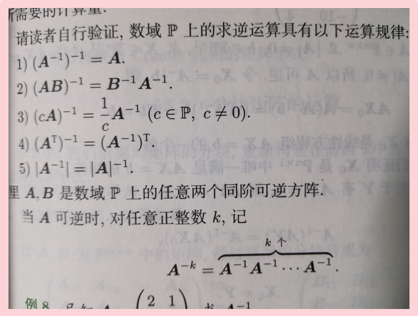
矩阵的运算

矩阵的加减法、数乘、乘法和转置

- 矩阵相等的定义
  - 规模相等
  - 每一项相等
- 运算
  - 矩阵的加减法
    - 每一项和数的加减法相同
    - 交换律 结合律
    - n元行（列）向量的定义，第i个分量定义
  - 矩阵的数乘
    - c倍运算
    - 负矩阵的定义
    - 结合律 分配律 减法公式 行列式
  - 矩阵的乘法
    - 行列积之和
    - 解向量
    - 线性替换
    - 结合律 分配律
    - AB=O A为左零因子 B为右零因子
    - 对角矩阵
      - n阶数量矩阵
      - n阶单位矩阵
    - k次幂
    - |AB|=|A||B|
      - 证明：构造分块矩阵 p47
  - 矩阵的转置
    - 运算规律
      - （A')'=A
      - (A+-B)'=A'+-B'
      - (cA)'=cA'
      - (AB)'=B'A'
      - r(A)=r(A')
      - A是方阵时，|A|=|A'|

矩阵求逆

- 定义（退化 奇异）
- 定理
  - 唯一性
    - 证明：设AB=BA=E，AC=CA=E，证B=C
  - A可逆——|A|！=0——r（A）=n
    - 证明1——>：可逆构造|A||B|=1，得|A|！=0
    - 证明1<——：构造伴随矩阵
  - n阶方阵只需要AB=E即可证逆矩阵
- 运算规律



请读者自行验证，数域 $\mathbb{P}$ 上的求逆运算具有以下运算规律:

1) $(A^{-1})^{-1}=A$.
2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
3) $(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$ $(c\in\mathbb{P},\ c\neq 0)$.
4) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.
5) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

里 A,B 是数域 $\mathbb{P}$ 上的任意两个同阶可逆方阵.

当 A 可逆时，对任意正整数 k，记

$$A^{-k}=\overbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}^{k\text{ 个}}.$$

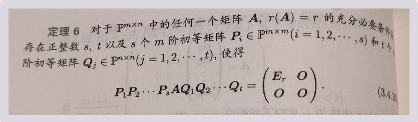
- Cramer法则的矩阵形式

分块矩阵的运算

- 和差数乘
  - 相当于将子块看成元素
- 积
  - 相当于将子块看成元素
  - 注意分块方式相同
- 转置
  - 互换子块行列位置
  - 子块内部转置
- 求逆
  - 针对结构特殊的矩阵分块简化求逆
- 准对角矩阵
  - n阶准对角矩阵（n是ni求和）
  - 运算规律
    - 加减和乘法
    - 方阵行列式计算
    - 求逆

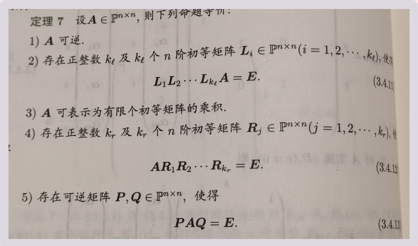
矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系

- 第一二三型初等矩阵
  - 互换
  - 倍乘
  - 倍加
- 性质1：初等变换及逆向变换对应的矩阵互为逆矩阵
- 定理5：对矩阵实施一次初等行（列）变换所得的新矩阵等于用该初等变换所对应的矩阵左（右）乘原矩阵所得的积



定理 6 对于 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任何一个矩阵 A，$r(A)=r$ 的充分必要条件是存在正整数 s,t 以及 s 个 m 阶初等矩阵 $P_i\in\mathbb{P}^{m\times m}(i=1,2,\cdots,s)$ 和 t 个 n 阶初等矩阵 $Q_j\in\mathbb{P}^{n\times n}(j=1,2,\cdots,t)$，使得

$$P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}. \quad (3.4.10)$$



定理 7 设 $A\in\mathbb{P}^{n\times n}$，则下列命题等价:

1) A 可逆.
2) 存在正整数 k_ℓ 及 k_ℓ 个 n 阶初等矩阵 $L_i\in\mathbb{P}^{n\times n}(i=1,2,\cdots,k_\ell)$，使得

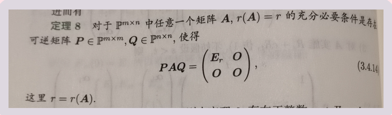
$$L_1L_2\cdots L_{k_\ell}A=E. \quad (3.4.11)$$

3) A 可表示为有限个初等矩阵的乘积.
4) 存在正整数 k_r 及 k_r 个 n 阶初等矩阵 $R_j\in\mathbb{P}^{n\times n}(j=1,2,\cdots,k_r)$，使得

$$AR_1R_2\cdots R_{k_r}=E. \quad (3.4.12)$$

5) 存在可逆矩阵 $P,Q\in\mathbb{P}^{n\times n}$，使得

$$PAQ=E. \quad (3.4.13)$$

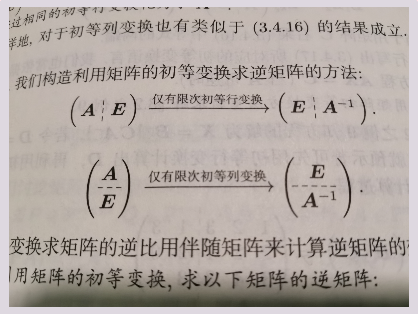


定理 8 对于 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中任意一个矩阵 A，$r(A)=r$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{P}^{m\times m},Q\in\mathbb{P}^{n\times n}$，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}, \quad (3.4.14)$$

这里 $r=r(A)$.

- 充要证明
- 推论：矩阵相抵的充要条件是PAQ=B



对于初等列变换也有类似于 (3.4.16) 的结果成立.

我们构造利用矩阵的初等变换求逆矩阵的方法:

$$\left(A \,\vdots\, E\right)\xrightarrow{\text{仅有限次初等行变换}}\left(E \,\vdots\, A^{-1}\right).$$

$$\begin{pmatrix}A\\ \hdashline E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{仅有限次初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\ \hdashline A^{-1}\end{pmatrix}.$$

变换求矩阵的逆比用伴随矩阵来计算逆矩阵的

用矩阵的初等变换，求以下矩阵的逆矩阵:

利用矩阵的初等变换求逆矩阵

- 用C替换E——相当于用C右乘A逆——用于求解AX=C（p62例17）

矩阵运算对矩阵秩的影响

- r(PAQ)=r(A) 初等变换不改变矩阵的秩
- r(AB)<=min{r(A),r(B)}
  - C为AB构成的准对角矩阵，r(C)=r(A)+r(B)
- r(A+B)<=r(A)+r(B)
- Sylvester不等式 r(AB)>=r(A)+r(B)-n
- Frobenius不等式 r(ABC)>=r(AB)+r(BC)-r(B)

常用方法

- 构造分块矩阵
- 化为相抵标准型
- 按行列分块后讨论表出关系
- 遇到AB=0的情况，可以对解空间的性质进行讨论

Presented with xmind