Generating Functions

- 定义

$$Sequence: a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$$

$$Generating\ Function: G(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- 无穷级数示例

$$\text{无穷项几何级数} G(x) = 1 + x + .. + x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{有限项几何级数} G(x) = 1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$$

$$\text{二项式级数} G(x) = \sum_{k=0}^{m} C(m,k) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$$

- 计算公式， $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$
  - 线性性：$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$
  - 移位：$x^m f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k x^{k+m} = \sum_{t=n+m}^{\infty} a_{t-m} x^t$
  - 逐项求导：$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$
  - 逐项积分:$\int_0^x f(t)dt = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k$
  - $f(\alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot a_k x^k$
  - 卷积：$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}) x^k$
  - **Important**：$x f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$
- 广义二项式系数

$$\binom{m}{k} = C(m,k) = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\text{广义二项式系数} \binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+k-1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

- 广义二项式定理

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

- 卷积应用

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

$$考虑b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i,F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=?$$

$$令c_k=1,H(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\frac{1}{1-x}$$

$$b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i=\sum_{i=0}^{k}a_i\cdot c_{k-i}$$

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=\frac{1}{1-x}G(x)$$

题型

- 生成函数展开成数列

$$f(x)=\frac{1}{1-4x^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1+2x})$$
$$=\frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{\infty}(2^k+2^{-k})x^k]$$
$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{2}(2^k+2^{-k})$$

- 数列转化成生成函数

$$a_k=\sum_{i=1}^{k}i^2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot x^k=\frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=x(\frac{1}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k=x(\frac{x}{(1-x)^2})'=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{k}i^2)x^k=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

- 计数问题和生成函数
  - 不考虑选出次序时
    - 将最多能选m次，最少能选n次的元素看作$(x^n+x^{n+1}+...+x^m)$
    - 把不同的元素乘在一起，若总数为r，计算a_r
    - r-combination

集合中有n个元素，每个元素可以被选任意次，可表示为生成函数

$$G(x) = (1 + x + .. x^k + ...)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$$

$$r-combination\text{即选出元素个数一共}r\text{个时的选法个数，即}a_r = C(n+k-1, k)$$

- 取钱问题
  - 不考虑取钱次序 $G(x) = (1 + x + x^2 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^5 + x^{10} + ...) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$
  - 考虑取钱次序$G(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(x + x^2 + x^5)^r = \frac{1}{1-(x+x^2+x^5)}$
- 递推问题和生成函数（见例题11）
- 组合数问题和生成函数（见例题12）

总结

- 生成函数问题提供了解决数列问题的另一种角度，本质还是解决数列问题