曲率圆复习

1、曲率：$k=\dfrac{|y''x'-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{y=f(x)} k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

曲率半径：$R=\dfrac{1}{k}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$

2、曲率中心坐标 $A(\xi,\eta)$.
$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \eta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$$

微甲朋辈辅学

一、极限

(任何一个数列) 适 (函数)

海涅归结原理

1、数列极限 $\Longleftrightarrow$ 2、函数极限

① 判断数列敛散性

— 定义

— 夹逼准则

— 单调有界定理

— 转化为函数极限

e.g $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} \overset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

转化之后可用等价无穷小、泰勒、洛必达等

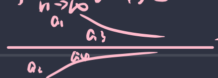
— 反证法

e.g. 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在

反设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0\end{array}\right\} \sin^2 n+\cos^2 n=1$ 矛盾

— 子列论证法

e.g. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 任一子列都收敛于同一值



奇偶数列

— 不动点迭代定理　　压缩映射、柯西定理

— 转化成级数　$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)+a_1 \le \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\sqrt{k}}{2^k}$ (收敛)

e.g. $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$

$\Longleftrightarrow$ 分子分母有理化

不定积分复习

1. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ —— ① △ 勿忘

   $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

   $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

   $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

   $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

   $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

   $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ $\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x & \text{—— ②} \\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x \end{cases}$

2. 线性运算法则 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 分部积分法

   (利用①+②可求 $\int \tan^n x\,dx$) $\quad \underset{\parallel}{(\sec^2 x - 1)\tan^{n-2} x\,dx}$, $\sec^2 x\,dx = d\tan x$

3. 第一换元法(凑微分法)

   $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\arcsin x$

   $\frac{1}{1+x^2}dx = d\arctan x$

   $\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \\ \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \end{cases}$

   $\begin{cases} \int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C \\ \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \end{cases}$

   $\begin{cases} \int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \\ \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C \end{cases}$

   $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx\ (a \neq 0) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

   常用模型: ① $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

   ② $\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

   ③ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$; $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

   $\Rightarrow \int \frac{a}{ax+b}dx = \ln|ax+b| + C$, $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln|ax^2+bx+c| + C$

   *三角问题: 降次/积化和差

   ④ $\int f^{\alpha}(x) f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{1+\alpha}}{1+\alpha} + C$

   ⑤ $\int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(e^x)}{e^x}(e^x)'\,dx = \int \frac{f(e^x)}{e^x}\,de^x = F(e^x) + C$

4. 第二换元法(变量代换法) 前提条件: $x = \varphi(t)$ 严格单调、可微

常用情况: ①去根号: 一次根式整体换元, 二次根式三角或整体换元

②"头重脚轻"被积函数: 倒代换

对 $\sqrt{a^2+x^2}$, 令 $x = a\tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

对 $\sqrt{x^2-a^2}$, 令 $x = a\sec t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

5. 分部积分法 常与递推结合

$\begin{cases} \int P_n(x)\ln x\,dx \\ \int P(x)\arcsin x\,dx \\ \int P(x)\arctan x\,dx \end{cases}$ (需用n次分部积分)

$\int e^{ax}\sin x\,dx$ 使用两次分部积分, 然后解方程法

$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ 分部积分建立递推

6. 有理函数的不定积分

① 大除法 假分式化真分式

② 待定系数法（赋值法）将既约有理真分式表示成简单分式之和　　！复杂多项式结构注意裂项（分子），不一定全是多项式

③ 简单分式的处理：分离分子 + 配方法

$$* \ I_n=\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\,d(x^2+a^2)^{-n}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\cdot(-n)\cdot(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2x\,dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1} \quad \left(I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\right)$$

7. 三角函数有理式的不定积分

一般情况　s1. 将式子化成 $\sin x$、$\cos x$ 相关

s2. $t=\tan\frac{x}{2}$，$x\in(-\pi,\pi)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

s3. 转换为有理函数的不定积分

特殊情况 —— 降幂　① $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$　其中 m,n 中至少有一个奇数 $\Rightarrow$ 将奇数次项分离出一次幂后凑微分

② ⋯　其中 m,n 均是偶数或零 $\Rightarrow$ 降幂

—— 积化和差

8. 无理函数的不定积分

① 直接换元去根号　② 配方 + 三角换元去根号