① $\sum k a_n \xleftrightarrow{k\neq 0} \sum a_n$ ② 加减(收+收=收) ③ 任意添加括号后仍收敛 —— 剑括去掉不一定

④ 去掉、添加、改变有限项 不改变敛散性

性质

部分和数列 $\{S_n\}$

(常数项级数、通项)

级数 → 无穷级数 → 敛散性 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ 收敛 证明 ① 必要条件 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

的和

发散

任意 S_n ② 柯西收敛准则 → 充要条件：

$\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ 当 $n>N$ 时，$\forall p\in N^+$

有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

适用于 a_n 可裂项情形

证极限的方法 ++

常用级数及其敛散性

① 等比级数 (几何级数) $|q|<1$ 收敛，$|q|\geq 1$ 发散

② p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p\leq 1$ 发散，$p>1$ 收敛

反证法 $(\varepsilon_0=\frac{1}{2}, p=n_0)$

$\sum \frac{1}{n}$ 发散

调和级数

$\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛 阿贝尔判别法

$\{a_n\}$ 单调，$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 部分和有界 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛 狄利克雷判别法

① 比较判别法

极限判别法

(前置条件：$\lim_{n\to+\infty} a_n, b_n = 0$)

适用于可用泰勒估阶的情形

正项级数

核心思想：单调有界

一般项级数

柯西判别法，条件收敛判别法 (?)

条件收敛 $\longleftrightarrow$ 绝对收敛 $(|a_n|)$

归结

保号性 + 比较判别法

② 比值判别法 / 达朗贝尔判别法

S1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ S2. $l>1$ 发，$l<1$ 收，$l=1$

③ 根值判别法 / 柯西判别法 类 R^n 结构

④ 积分判别法

△ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$?

交错级数

↓

莱布尼茨判别法 / 泰勒展开

性质

① 改变任意项后也绝对收敛

② $\sum a_n$ $\sum b_n$ 绝对收敛 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j = S_1 S_2$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \overset{n=\frac{1}{x}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

① 若不单调 可考虑莱布尼茨思想 用定义 S_{2n} 单调有界 $(a_{2n-1}+a_{2n})$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_n$，$S_{2n}\to S$，$a_n\to 0$，$S_{2n+1}\to S$ $\Rightarrow S_n \to S$

② 证发散 拆成收+散

注意变形

幂级数及其和函数 —— $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ —— 收敛点 ⇒ 收敛域

△

阿贝尔定理

$|x|<|x_0|$ 绝对收敛

⇓

收敛半径

↓

收敛区间 (不考虑端点)

↓ 考虑端点

收敛域

一般用比值判别法 若不存在 lim 需判 但收敛半径一定存在 可以尝试放缩 or 柯西判别法

性质

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ (\forall x\in I)$

和函数 (定义域：收敛域)

① 连续性 ② 逐项可积性 ③ 逐项可导性

逆运算

→ 注意下标变化，及时提出不参与幂级数的项

换元(注意)/提 x^k / 分拆

求幂级数的和函数 —— 求收敛域 → 利用逐项可积、逐项可导求和 → 利用连续性讨论端点

(可能多次)

幂级数展开 —— 泰勒级数 ⟶ 泰勒定理

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$$

泰勒展开式 $\xrightarrow{x_0=0}$ 麦克劳林展开式

常见函数的幂级数展开

(先证 $R_n\to 0$) 取绝对值 M

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

注意下标

！在做题的时候，也需要说明收敛域

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad\boxed{-1<x\le 1}$$

☆ 降幂（积化和）

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\quad(-1<x<1)$$

$$\alpha=-1:\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ (x\in(-1,1))$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{x-1}{x^3-1}$$

立方差公式

和函数利用逐项可积时注意分类讨论 $(x\neq 0)$

一般函数 $T=2l$，将 π 换成 l

延拓

傅里叶级数 $f(x)$ 是 $T=2\pi$ 的函数，且能展开成三角级数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

① 一个T内连续或只有有限个第一类间断点

② 在一个周期内只有有限个极值点

分解成奇+偶 (f_1+f_2) ⇒

$$\begin{cases}a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\end{cases}$$

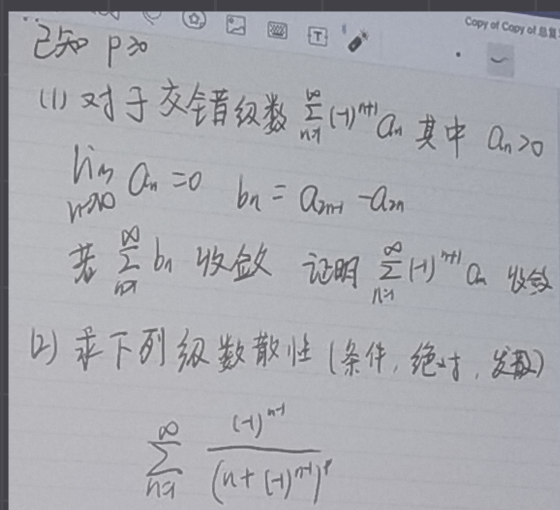
正弦级数 奇函数 $a_n=0$ 且 $a_0=0$

余弦级数 偶函数 ⇒ $b_n=0$

$$*\quad\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\Rightarrow \text{端点处另算}$$

！复习上学期积分部分

求具体级数和（代值）


已知 $p>0$

(1) 对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 其中 $a_n>0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ $\quad b_n=a_{2n-1}-a_{2n}$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 收敛

(2) 求下列级数敛散性（条件，绝对，发散）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+(-1)^{n-1})^p}$$

C8. 向量代数与空间解析几何

（三者互相垂直）

向量积 $\vec c=\vec a\times\vec b\Rightarrow|\vec c|=|\vec a||\vec b|\sin\theta$ → 2S 三角形面积

混合积 $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=|\vec a\times\vec b|\cdot|\vec c|\cdot\cos\alpha=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\theta\,|\vec c|\cdot\cos\alpha$ ⇒ 平行六面体体积 ⇒ 轮换性（有顺序）

三向量共面 ⇔ 混合积为零

方向角

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec a|}\\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec a|}\\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec a|}\end{cases}\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\vec a_0=\frac{\vec a}{|\vec a|}=\cos\alpha\cdot\vec i+\cos\beta\cdot\vec j+\cos\gamma\cdot\vec k$$

坐标运算 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ $\xleftrightarrow{\text{混合积为零}}$ 三向量共面 ⟷ 四点共面

平面方程

(1) 表示：一点+法向量 ⇒ 点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

↓

一般式 $Ax+By+Cz+D=0$

坐标轴截距 ⇒ 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

(2) 点到平面距离公式 $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

↓

两平面距离 $l=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

直线方程

(1) 表示：一点+方向向量 ⇒ 点向式 $\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$

两平面交线 ⇒ 一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

($\vec{n_1}$ 和 $\vec{n_2}$ 不平行)

$\vec{u}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ + 一点

需要化成一元 $\xRightarrow{\text{改写点向式}}$ 参数式 $\begin{cases} x=x_0+u_xt \\ y=y_0+u_yt \\ z=z_0+u_zt \end{cases}$ $t\in(-\infty,+\infty)$

已知直线上两点 ⇒ 两点式 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

(2) 点到直线的距离公式 $d=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{u}|}$ （P_0：所求距离的点；P_1：直线上一点）

(3) 平面束方程

↓

用于表示"通过L的平面" ⇒ $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

L：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

平面与平面：
- 平行 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ → 重合 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$
- 二面角 $\langle n_1,n_2\rangle$ → 垂直 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

平面与直线：
- 平行 $\vec{n}\perp\vec{u}$ → 包含：平行+取直线上一点在平面内；任取两点均在平面内
- 相交 $\alpha=\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|$，$\theta=\langle\vec{n},\vec{u}\rangle$

直线与直线：
- 平行 → $u_1\parallel u_2$ → 重合：平行有一交点；任意两个交点

↳ 不平行 → 夹角 $\langle u_1, u_2\rangle$ ——→ 垂直: $\langle u_1, u_2\rangle = \frac{\pi}{2}$

相交 —— $\exists! t_1\ \exists! t_2$ s.t. $\begin{cases} x_1+t_1u_x = x_2+t_2v_x \\ y_1+t_1u_y = y_2+t_2v_y \\ z_1+t_1u_z = z_2+t_2v_z \end{cases}$

—— $\begin{cases} \frac{x-x_1}{u_x} = \frac{y-y_1}{u_y} = \frac{z-z_1}{u_z} \\ \frac{x-x_2}{v_x} = \frac{y-y_2}{v_y} = \frac{z-z_2}{v_z} \end{cases}$ 有唯一解 (x_0, y_0, z_0) (交点)

异面 $\Leftrightarrow (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$

↳ 异面直线的距离 $h = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$

曲面方程 $F(x,y,z)=0 \xrightarrow[\text{(参数要有几何意义)}]{\text{参数方程}} \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

曲线方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{参数方程}} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$(x_0, y_0, z_0) \to (x, y, z)$ 与k轴垂直

↑

旋转曲面 → 旋转信息 ① 绕k轴旋转k不变 ② 距k轴d不变.

(通常使用参数方程代入)

柱面 — 母线 (直)、准线 (曲)

① 利用 $\overrightarrow{PP_0}$ 与母线平行 ——→

② 将 $P(x,y,z)$ 代入 P_0 所在准线方程.

⇓

柱面.

— 投影柱面、投影曲线

$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{消z}}$ $F(x,y)$ (柱) $\xrightarrow{\text{投影}} xOy$; 曲线 ; $\begin{cases} z=0 \\ F(x,y) \end{cases}$

锥面. — 母线、准线、顶点 A

① $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AP_0}$

② $p(x,y,z)$ 代入 P_0 所在准线方程

二次曲面 (截痕法)

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 　椭圆锥面 $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\xrightarrow{\text{可视为两族直线}}$ 直纹面

双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

双曲抛物面 $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (马鞍面) → 直纹面

期末复习

chapter 10 ~12

二重积分（曲顶柱体体积） $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

①累次积分 —— 积分次序交换（若必要）

②变量替换（注意雅可比行列式 $\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}$）

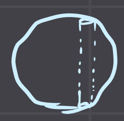
极坐标换元 $J=r$ ⇒ 广义极坐标、平移变换 $|J|=1$

③从定义（面积）出发

④对称性 & 轮换性

三重积分 $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ — 必要时交换积分次序

①投影法：$\iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$



②截面法：$\int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} \underbrace{f(x,y,z)\,dx\,dy}_{\text{通常面积可直接求}}$ 被积函数只出现一个变量时

③坐标变换

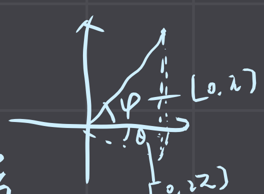
(i) 柱面坐标变换

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad J=r$$

(ii) 球面坐标变换

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \qquad J=-\rho^2\sin\varphi$$

积分时不能用负号



应用 ①质心 M 为密度的积分　　形心：$\rho=\rho_0$

②转动惯量（距 z 轴：$(x^2+y^2)\rho$）

物体间的引力需要分解后才能积分

⇓

平移变换

广义球坐标、$J=abcr$

广义柱坐标 $J=abc\rho^2\sin\varphi$

第一类曲线积分（弧长） $\int_L f(x,y,z)\,ds$

$$ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

XOY 平面：
$$ds=\begin{cases} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, & y=y(x),\ x\in[x_1,x_2] \\ \sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta, & x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta \\ \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt, & x=x(t),\ y=y(t) \end{cases}$$

第二类曲线积分

（不建议使用对称性，若要对称，化为第一类）直接计算注意方向性

$$\int_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

法一：参数换元：

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt=-\int_{BA} f(x,y,z)\,dx$$

y、z 同上　　方向性

法二：格林定理：注意曲线封闭性，向量场偏导连续性

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{L^+} P\,dx+Q\,dy$$

D 内无奇点

* 求面积：$\oint_C x\,dy=\oint_C -y\,dx=A(D)=\iint 1\,dx\,dy$

$=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$

遇到偏导不相等的情况：

①分拆成偏导相等和较简单的部分

②加一条线形成闭曲线，使用格林公式后减去那条线

曲线积分与路径无关性

充分条件：单连通闭区域

$\oint_L P\,dx+Q\,dy=0$，与路径无关 ⇔ $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$

曲线积分第一基本定理：

$$u(x,y)=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P\,dx+Q\,dy=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$$

曲线积分第二基本定理：（曲线积分的牛顿—莱布尼兹公式）

$$\int_{L_{AB}} P\,dx+Q\,dy=u(x,y)\Big|_A^B=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)$$

第一类曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}\,dx\,dy$$

D_{xy}：S在xoy上的投影区域　（也可以投影到别的平面）

隐函数：$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{1}{|F'_z|}\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}\,dx\,dy$

* 注意使用对称性和可轮换性

参数表示：$S=\iint_T \left|\underbrace{\frac{\partial\delta}{\partial u}\times\frac{\partial\delta}{\partial v}}_{\left|\begin{matrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{matrix}\right|}\right| du\,dv$

第二类曲面积分（没有中值定理）

法向量和坐标轴的正方向 $\begin{cases}\text{锐角取正}\\ \text{钝角取负}\\ \text{垂直为零}\end{cases}$ ⇒ 分成不同部分

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS = \pm\iint_{D_{yz}} P\,dy\,dz \pm \iint_{D_{zx}} Q\,dz\,dx \pm \iint_{D_{xy}} R\,dx\,dy$$

高斯公式（三重积分 ↔ 第二类曲面积分）　☆闭曲面

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \oiint_S P\,dx\,dy+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

V：连续偏导数

斯托克斯公式（曲面积分 ↔ 曲线积分）　右手法则定方向

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$= \iint_S \left|\begin{matrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{matrix}\right|$$

$\begin{cases}\text{梯度场} & \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \text{散度场} & \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \\ \text{旋度场} & \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\end{cases}$

有势场　$\exists\varphi$，使 $\vec{f}=\nabla\varphi$

无旋场　$\operatorname{rot}\vec{f}=0$　　无源场　$\operatorname{div}\vec{f}=0$

调和场：既是无旋场，又是无源场

$\nabla\varphi=\vec{f}$ ⇒ laplace方程

φ：调和函数

第九章 多元函数微分学

(1) 多元函数的概念 (数量场)

(2) 二元函数的极限、连续及连续函数的性质

(3) 偏导数与全微分

- 偏导数的定义、意义、偏导数与连续的关系
- 全微分的定义、意义、可微与可偏导、连续的关系
- $z=f(x,y)$: $\boxed{f'_x, f'_y\text{连续}} \rightarrow \boxed{f\text{可微}} \rightarrow \boxed{f\text{连续}}$, $\boxed{f'_x, f'_y\text{存在}}$
- 高阶偏导数的定义及计算
- 复合函数求偏导的链式法则、隐函数求偏导

*隐函数存在定理

(4) 多元函数的极值与条件极值

- 极值的定义、必要条件；二元函数极值的判别
- 拉格朗日乘数法 (最大、最小值的计算)
- 二元函数的泰勒公式

(5) 方向导数及其计算、意义；数量场的梯度

- 数量场沿梯度方向方向导数达到最大值(梯度的模)

(6) 向量函数及其极限、连续、导数及意义

- 空间曲线的切线与法平面方程
- 曲面的切平面与法线方程

(7) 向量场的概念及其极限、连续、雅可比(Jacobi)矩阵

1 $D\subset\mathbb{R}^n$, $P\in D \Rightarrow z=f(P)$

2.1 $P\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$, $|f(P)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$

2.1.1 二元极限存在性与求解 (重极限)

① $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 与

$|x-x_0|<\delta$ 和 $|y-y_0|<\delta$ 的等价性

② 夹逼定理

*在二元极限下,等价无穷小法则不适用

换元后可使用

③ 均值不等式 $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

④ 极坐标换元 cos, sin 的有界性

2.1.2 二元极限不存在的证法

取两条 $y=f(x)$ 证明二者极限不相等

2.1.3 累次极限与重极限的关系 若都存在,则二者相等

2.2 连续性与增量 全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ ⇒ 偏增量

$z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0$

连续 → 介值定理、最值定理

3.1 偏导数 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, x_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在 则 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在.

可偏导不一定连续

3.2 全微分 $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ $(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0)$

⟺证可微: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(f'_x\Delta x+f'_y\Delta y)}{\rho}=0$

f'_x, f'_y 连续 → 可微 → 连续, 可偏导

$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ $\xrightarrow{\text{换元}\left\{\begin{array}{l}u=g(x,y)\\ v=g(x,y)\end{array}\right.}$ $dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$ 一阶全微分的形式不变性

3.3 高阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 先x后y $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$

$f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有二阶连续偏导数 $\rightarrow f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$

3.4.1 复合函数求偏导 ⇒链式法则

3.4.2 隐函数求偏导

$\left\{\begin{array}{l}\text{函数}F\text{在以}P_0(x_0,y_0)\text{为内点的某一区域}D\subset\mathbb{R}^2\text{上连续}\\ F(x_0,y_0)=0\\ F'_x(x,y), F'_y(x,y)\text{存在且连续}\\ F'_y(x_0,y_0)\neq 0\end{array}\right.$ (充分条件)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

优化方法：求微分

三元：通常直接两边对 x,y 求偏导数

3.4.2.1 高阶隐函数偏导数　① 分别对 x，对 y 求导并求出值

② 对已求一阶导的方程求二阶导，代入一阶导值求出值

3.4.2.2 对方程组，直接使用隐函数求偏导

4.1.1 二元函数的极值　邻域 ⇒ 极大/小值点

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有连续的二阶偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，

记 $\begin{cases} A=f''_{xx}(x_0,y_0) \\ B=f''_{xy}(x_0,y_0) \\ C=f''_{yy}(x_0,y_0) \end{cases}$ 则 B^2-AC $\begin{cases} <0，P_0(x_0,y_0) \text{为极值点} \begin{cases} A>0 \Rightarrow \text{极小} \\ A<0 \Rightarrow \text{极大} \end{cases} \\ >0，\text{不是极值点} \\ =0，\text{可能有也可能无} \end{cases}$

4.1.2 区域上的最值：① $f'_x=f'_y=0$ 的驻点
② 不可偏导的点
③ 每条边界的最值（边界方程代入）
} max. min

4.2 多元函数的条件极值（拉格朗日乘数法）

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\sum\lambda_i g_i(x,y,z)$，$f(x,y,z)$ 为目标函数（求最值），$g(x,y,z)=0$ 为题设条件（λ 可以有多个）

$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0 \end{cases}$ ⇒ 驻点　代入 f 得最值

* 同时，对于 D 内的最值问题，考虑 ① 边界（条件极值）

② $\mathrm{int}\, D$

4.3 二元函数的泰勒展开

$\Delta x=x-x_0，\Delta y=y-y_0$　有 $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+$
$\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$ $(0<\theta<1)$

其中 $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^{k-i}}(\Delta x)^i(\Delta y)^{k-i}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$k=1,2,3\ldots$

5.1 方向导数及其意义

$\rho=|\overset{\text{起点}}{M_0}M|$ 沿方向 l　若 $\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$ 存在，即为 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$（$f$ 在 M_0 处沿 l 的方向导数）

充分而非必要条件
若 f 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 f 在点 M_0 处沿任何方向 l 的方向导数均存在，且

$\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M)\cos\gamma$　其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 l 的方向余弦

① 求偏导（必要时利用复合函数链式法则）　② 化为单位向量　③ 组合计算

5.2 梯度　$\mathrm{grad} f=(f'_x(M),f'_y(M),f'_z(M))$　沿梯度方向方向导数达到最大值

6.1 向量函数

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

极限：$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=A=(a_1,a_2,a_3)$ 存在当且仅当每个分量的极限均存在

导数：对 $\vec{r}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ 若 $\lim_{t\to t_0}\frac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0}$ 均存在且为 b_i，则称 $\vec{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 处可导，(b_1,b_2,b_3)

为 $\vec{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 处导数，记作 $\vec{r}'(t_0)$ 或 $\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t_0}$

切向量：$\vec{s}=r'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$

6.2.1 空间曲线的切线 $\qquad \frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

6.2.2 空间曲线的法平面 $\qquad x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

* 一般式化参数式 → 选取非常数变量为参数 　　或两切平面交线

6.3.1 空间曲面的切平面 $\qquad \vec{n}=(F_x',F_y',F_z')\big|_{M_0}$

$$\Rightarrow \pi:\ F_x'(M_0)\cdot(x-x_0)+F_y'(M_0)\cdot(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0$$

$$l:\ \frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}$$ 法线